3. Übungsblatt zur PC II, Statistik und Kinetik (WS 2006/07)
Prof. Brutschy

Ausgabe: 31.10.2006 Abgabe: 07.11.2006

Aufgabe 1 (Maxwell-Boltzmann Verteilung) (4 Punkte)

Die Geschwindigkeitsverteilung eines idealen Gases ist durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung $W(v) = Nv^2 e^{-mv^2/2k_BT}$ gegeben, wobei N der Normierungsfaktor ist.

a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor durch Normierung der Verteilungsfunktion.
b) Berechnen Sie für ein Molekül N_2 bei Raumtemperatur (T = 300 K) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, den Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ und den Mittelwert der kinetischen Energie.

Aufgabe 2 (Van der Waals Gas) (3 Punkte)

Die Zustandssumme eines einatomigen van der Waals Gases ist gegeben durch

$$Z(N,V,T) = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3N/2} \cdot (V - Nb)^N e^{aN^2/V k_B T},$$

wobei a und b die van der Waals Konstanten sind und N die Anzahl der Atome. Leiten Sie aus der Zustandssumme den Ausdruck für die mittlere Energie und daraus den Ausdruck für die Wärmekapazität $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ her. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem für ein einatomiges ideales Gas.

Aufgabe 3 (Translatorische Zustandssumme) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Zustandssumme der Translation für ein ideales Gas in einem dreidimensionalen Kasten mit den Kantenlängen $L_x = L_y = L_z = L$, gegeben ist durch:

$$Z = \frac{L^3}{h^3}(2\pi m k_B T)^{3/2}.$$

Die Energieniveaus seien gegeben durch

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \text{ für } n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3...$$

Hinweis: Für die Herleitung betrachten Sie n_x, n_y, n_z als kontinuierliche Variable und berücksichtigen Sie, dass $e^{a+b+c} = e^a \cdot e^b \cdot e^c$.

b.w.

Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben 1 und 3 folgende Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{k!}{2a^{k+1}}$$ für ungerade n mit $n = 2k+1\ (k = 0, 1, 2...),\ \mathrm{a} > 0$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}a^{k+1/2}}$$ für gerade n mit $n = 2k\ \ (k = 1, 2...),\ \mathrm{a} > 0$