Lösungen des Übungsblattes 4 zur Vorlesung Theoretische Chemie I
WS 2018/19 – Übungsblatt 4

1. Hermitesche Operatoren (übernommen von Übungsblatt 4)
   (Referenz: Abschnitt 1.8 "Hermitian Operators", Kapitel 1, *Molecular Quantum Mechanics*, 5th ed., Peter Atkins und Ronald Friedman)

   a) $\hat{A}$ ist ein hermitischer Operator. Das bedeutet, dass er selbst-adjungiert ist.

   $$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \tag{1}$$

   Somit erfüllt der hermitischer Operator die folgende Beziehung für die gegebenen Wellenfunktionen $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$

   $$\langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\Phi|\hat{A}^\dagger|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Phi\rangle^* \tag{2}$$

   b) Betrachten Sie die Eigenwertgleichung

   $$\hat{A}\,|\Psi\rangle = \omega\,|\Psi\rangle \tag{3}$$

   Das ket $|\Psi\rangle$ bezeichnet einen Eigenzustand des Operators $\hat{A}$ in dem Sinne, dass die entsprechende Funktion $\Psi(x)$ eine Eigenfunktion des Operators ist und wir die Eigenzustände mit dem Eigenwert ω des Operators $\hat{A}$ bezeichnen. Multiplikation von links mit $\langle\Psi|$ ergibt die Gleichung.

   $$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \omega\,\langle\Psi|\Psi\rangle = \omega \tag{4}$$

   wobei $|\Psi\rangle$ normiert werden soll. Nehmen Sie nun das komplexe Konjugat beider Seiten:

   $$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle^* = \omega^* \tag{5}$$

   Durch Hermitizität gilt jedoch $\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$. Daraus folgt, dass $\omega = \omega^*$, was bedeutet, dass der Eigenwert reell ist.

   c) Angenommen, die beiden Eigenzustände $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$ erfüllen die folgenden Beziehungen:

   $$\hat{A}\,|\Phi\rangle = \omega\,|\Phi\rangle \quad \text{und} \quad \hat{A}\,|\Psi\rangle = \omega'\,|\Psi\rangle \tag{6}$$

   Dann multipliziert man die erste Relation mit $\langle\Psi|$ und die zweite mit $\langle\Phi|$

   $$\langle\Psi|\hat{A}|\Phi\rangle = \langle\Psi|\omega|\Phi\rangle \quad \text{und} \quad \langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\Phi|\omega'|\Psi\rangle \tag{7}$$

   $$\implies \langle\Psi|\hat{A}|\Phi\rangle = \omega\,\langle\Psi|\Phi\rangle \quad \text{und} \quad \langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle = \omega'\,\langle\Phi|\Psi\rangle \tag{8}$$

   Nehmen Sie nun das komplexe Konjugat der zweiten Relation und subtrahieren Sie es von der ersten, während Sie die Eigenschaft von Aufgabe 5.(b) verwenden ($\omega = \omega^*$):

   $$\langle\Psi|\hat{A}|\Phi\rangle - \langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle^* = \omega\,\langle\Psi|\Phi\rangle - \omega'\,\langle\Phi|\Psi\rangle^* \tag{9}$$

Da $\hat{A}$ hermitischer ist, ist die linke Seite dieses Ausdrucks Null. Also (wenn wir feststellen, dass ω' reelle ist und $\langle\Phi|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\Phi\rangle$ verwenden), kommen wir an

$$\left(\omega - \omega'\right)\langle\Psi|\Phi\rangle = 0 \tag{10}$$

Da die beiden Eigenwerte jedoch unterschiedlich sind, kann diese Beziehung nur für $\langle\Phi|\Psi\rangle = 0$ erfüllt werden, wie zu beweisen war.

d)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\Psi(x) = 0$$

Die Demonstration der Hermitizität von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ beinhaltet partielle Integration, und wir betrachten das bestimmte Integral über den gesamten Raum, um das Verschwinden eines der Begriffe zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi(x)\,dx \\
&= \underbrace{\Phi^*(x)\Psi(x)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\frac{\mathrm{d}\Phi^*(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi^*(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right]^* \\
&= -\langle\Psi|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\Phi\rangle^* \\
&\neq \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\therefore \langle\Phi|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\Psi\rangle \neq \langle\Psi|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\Phi\rangle^*
\end{aligned} \tag{11}$$

Daher ist der Abteilungsoperator kein hermitischer. Im falle des Impulsoperator,

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\hat{p}|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(x)\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\Psi(x)\,dx = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left\{\underbrace{\Phi^*(x)\Psi(x)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\frac{\mathrm{d}\Phi^*(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi^*(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right\}^* = \langle\Psi|\hat{p}|\Phi\rangle^*
\end{aligned} \tag{12}$$

Daher ist der Impulsoperator hermitischer.

2.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle \hat{C} \rangle| \tag{13}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

a)

$$\hat{C} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] = [\hat{x}, \hat{p}_x]$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}\phi(x) &= (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\,\phi(x) \\
&= \left[x\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)x\right]\phi(x) \\
&= -\mathrm{i}\hbar x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) + \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\cdot\phi(x)\right) \\
&= -\mathrm{i}\hbar x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) + \mathrm{i}\hbar x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) + \mathrm{i}\hbar\phi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \\
&= \mathrm{i}\hbar\phi(x)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\therefore \hat{C} = [\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar \tag{15}$$

b) Die Unschärferelation für $\hat{x}$ und $\hat{p}_x$,

$$\begin{aligned}
\Delta x \Delta p &\geq \frac{1}{2}|\,\langle \hat{C} \rangle\,| \geq \frac{1}{2}|\,\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle\,| \\
&\geq \frac{1}{2}|\,\langle \mathrm{i}\hbar \rangle\,| \\
&\geq \frac{1}{2}|\mathrm{i}\hbar| \\
&\geq \frac{\hbar}{2}
\end{aligned} \tag{16}$$

c) $\hat{x}$ und $\hat{p}_x$ haben keine gemeinsamen Eigenfunktionen, da aus den Ergebnissen von a) und b) beobachtet werden kann, dass der Kommutator nicht auf Null verschwindet.

d)

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2}$$

Um N zu bestimmen, normalisieren wir die Wellenfunktion $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{17}$$

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Gamma(x-x_0)^2} = 1 \tag{18}$$

Integration durch Substitution verwenden, sei $x - x_0 = u$, dann $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Gamma u^2}\mathrm{d}u = 1$$

$$N^2\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} = 1$$

$$N^2 = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \tag{19}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x^2\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 N^2 e^{-2\Gamma(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\Gamma(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x$$

Integration durch Substitution verwenden, sei $x - x_0 = u$, dann $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und $x = u + x_0$.

$$\langle\hat{x}^2\rangle = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} (u+x_0)^2\, e^{-2\Gamma u^2}\,\mathrm{d}u = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^2 + 2ux_0 + x_0^2\right) e^{-2\Gamma u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= N^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-2\Gamma u^2}\,\mathrm{d}u + 2x_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-2\Gamma u^2}\,\mathrm{d}u}_{=0} + x_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Gamma u^2}\,\mathrm{d}u \right] \tag{20}$$

$$= N^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot(2\Gamma)^{\frac{3}{2}}} + x_0^2\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} \right] = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \left[\frac{1}{4\Gamma}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} + x_0^2\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\Gamma} + x_0^2$$

$$\langle\hat{x}\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\Gamma(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x$$

Erneut die Integration durch Substitution, sei $x - x_0 = u$, dann $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und

$x = u + x_0$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} (u + x_0)\, e^{-2\Gamma u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= N^2 \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-2\Gamma u^2}\, \mathrm{d}u}_{=0} + x_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Gamma u^2}\, \mathrm{d}u \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} x_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} \\
&= x_0
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{x} \rangle^2 = x_0^2 \tag{21}$$

$$\therefore \Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{4\Gamma} + x_0^2 - x_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}} \tag{22}$$

$$\hat{p}_x^2 = -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}^2 \hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}_x^2 \rangle &= \frac{\langle \psi | \hat{p}_x^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{p}_x^2 \psi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N e^{-\Gamma(x-x_0)^2} \left(-\hbar^2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} N e^{-\Gamma(x-x_0)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= -\hbar^2 N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma(x-x_0)^2} (-2\Gamma) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x - x_0)\, e^{-\Gamma(x-x_0)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= 2\Gamma\hbar^2 N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma(x-x_0)^2} \left[(x - x_0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{-\Gamma(x-x_0)^2} + e^{-\Gamma(x-x_0)^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x - x_0) \right] \mathrm{d}x \\
&= 2\Gamma\hbar^2 N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma(x-x_0)^2} \left[(-2\Gamma) (x - x_0)^2 e^{-\Gamma(x-x_0)^2} + e^{-\Gamma(x-x_0)^2} \right] \mathrm{d}x \\
&= 2\hbar^2 N^2 \Gamma \left[(-2\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 e^{-2\Gamma(x-x_0)^2}\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Gamma(x-x_0)^2}\, \mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

Integration durch Substitution verwenden, sei $x - x_0 = u$, dann $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}_x^2 \rangle &= 2\hbar^2 N^2 \Gamma \left[(-2\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-2\Gamma u^2} \,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-2\Gamma u^2} \,\mathrm{d}u \right] \\
&= 2\hbar^2 \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \Gamma \left[(-2\Gamma) \sqrt{\frac{\pi}{4(2\Gamma)^3}} + \sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} \right] \\
&= -4\hbar^2 \cdot \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \cdot \Gamma^2 \cdot \frac{1}{4\Gamma} \sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} + 2\hbar^2 \cdot \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \cdot \Gamma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}} \\
&= -\hbar^2 \Gamma + 2\hbar^2 \Gamma = \hbar^2 \Gamma
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}_x \rangle &= \frac{\langle \psi | \hat{p}_x | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) p_x \psi(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N e^{-\Gamma (x - x_0)^2} \cdot -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{-\Gamma (x - x_0)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{i}\hbar N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Gamma (x - x_0)^2} \cdot -2\Gamma \left(x - x_0 \right) e^{-\Gamma (x - x_0)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{i}\hbar \Gamma N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - x_0 \right) e^{-2\Gamma (x - x_0)^2} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Erneut die Integration durch Substitution, sei $x - x_0 = u$, dann $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$$\langle \hat{p}_x \rangle = 2\mathrm{i}\hbar \Gamma N^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-2\Gamma u^2} \,\mathrm{d}u = 0 \tag{24}$$

So $\langle \hat{p}_x \rangle^2 = 0$.

$$\therefore \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \hat{p}_x \rangle^2} = \sqrt{\hbar^2 \Gamma - 0} = \hbar \sqrt{\Gamma} \tag{25}$$

Daher ist das Unschärfeprodukt

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}} \cdot \hbar \sqrt{\Gamma}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \tag{26}$$

$\frac{\hbar}{2}$ ist der niedrigste gebundene Wert des Unshärfeprodukts, der mit der Ungleichung in Gl.(14) übereinstimmt.

3.

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L'}} \sin\left(\frac{\pi x}{L'} \right) & 0 \leq x \leq L' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{27}$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{28}$$

a) Um die Koeffizienten c_n zu bestimmen, berechnen wir das Skalarproduckt der beiden Funktionen

$$c_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle = \int_0^L \varphi_n^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{L}{2}} \varphi_n^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{L}{2}}^L \varphi_n^*(x) \underbrace{\psi(x)}_{=0}\,\mathrm{d}x$$

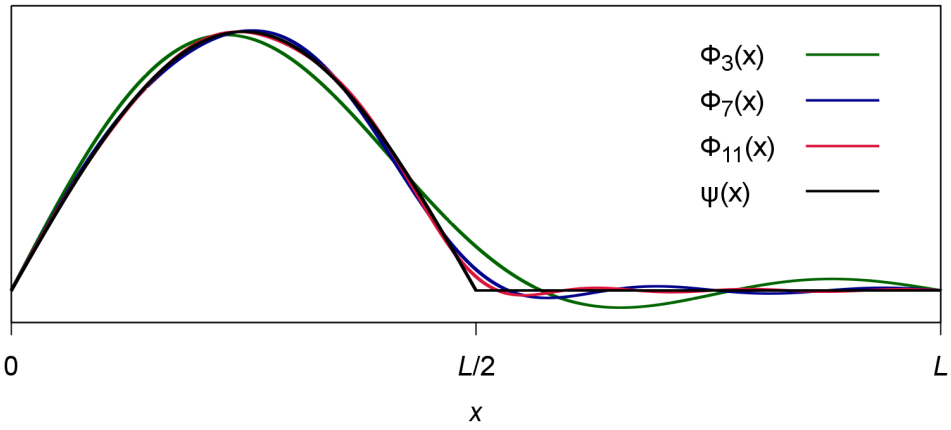
aus Gl.(24).

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^{\frac{L}{2}} \varphi_n^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{L}{2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L'}} \sin\left(\frac{\pi x}{L'}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{\frac{L}{2}}} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\frac{L}{2}}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L} \left[\frac{\frac{2\pi}{L}\sin\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\right) - \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\right)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} \right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L} \left[\frac{\frac{2\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi - \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi}{\frac{\pi^2-4\pi^2}{L^2}} \right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L} \cdot \frac{L^2}{-3\pi^2} \left(\frac{2\pi}{L} 1 \cdot (-1) - \frac{\pi}{L} \cdot 0 \cdot 0 \right) = \frac{2\sqrt{2}}{-3\pi^2} \cdot \frac{-2\pi}{L} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{2\sqrt{2}}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L}\left[\frac{\frac{L}{2}}{2} - \frac{\sin\left(2\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\right)}{4\cdot\frac{2\pi}{L}}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{L}\left[\frac{L}{4} - \frac{\sin 2\pi}{\frac{8\pi}{L}}\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L}\left(\frac{L}{4} - 0\right) = \frac{2\sqrt{2}}{L}\cdot\frac{L}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{2\sqrt{2}}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L}\left[\frac{\frac{2\pi}{L}\sin\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{3\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\right) - \frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{3\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\right)}{\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L}\left[\frac{\frac{2\pi}{L}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\pi - \frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin\pi}{\frac{9\pi^2-4\pi^2}{L^2}}\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{L}\cdot\frac{L^2}{5\pi^2}\left(\frac{2\pi}{L}(-1)(-1) - \frac{3\pi}{L}\cdot 0\cdot 0\right) = \frac{2\sqrt{2}L}{5\pi^2}\cdot\frac{2\pi}{L} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{5\pi}
\end{aligned}
$$



b) $|\varphi_n\rangle$ in Dirac-Notation repräsentiert den von der Funktion $\varphi_n(x)$ im Raum beschrieben wird.

c) Die Koeffizienten c_n können in Dirac-Notation als dargestellt werden

$$c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle \tag{30}$$