Übungen zur PC III - Lehramt
Übungsblatt 7 SS 2013
Ausgabe: Do 27. Juni, Rückgabe: Do 04. Juli, 10:00 Uhr

1. **Aufgabe:**
   Das Rotationsspektrum von $^{79}Br^{19}F$ zeigt eine Reihe von äquidistant verteilten Linien mit einem Abstand von $\Delta\tilde{\nu} = 0.71433\text{cm}^{-1}$.

   (a) Berechnen Sie die Rotationskonstante B, das Trägheitsmoment I und die Bindungslänge R des Moleküls.

   (b) Bestimmen Sie die Wellenzahl $\tilde{\nu}$ des Übergangs von $J = 9$ nach $J = 10$.

2. **Aufgabe:**
   Berechnen Sie die Masse des Isotops ^{13}C (in u) aus den Rotationsübergängen $(J = 0 \to J = 1)$

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}: \quad & \tilde{\nu}_1 = 3.84235\text{cm}^{-1}\,, \\
{}^{13}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}: \quad & \tilde{\nu}_2 = 3.67295\text{cm}^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

   Nehmen Sie dabei an, dass sich die Bindungslänge R nicht ändert, und dass $m_{^{16}\mathrm{O}} = 15.9949\text{u}$ beträgt.

3. **Aufgabe:**
   Zeigen Sie durch Einetzen, dass die Wellenfunktion $\psi_J(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{iJ\varphi}$ mit $J = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ die Schrödingergleichung für eine Rotation in der x-y-Ebene,

$$
-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_J(\varphi) = E_J\psi_J(\varphi)\,,
$$

   erfüllt. Bestimmen Sie die dazu gehörenden E_J.

Blatt 7

4 Punkte

1) Geg.: $m_1 = 79u$, $m_2 = 19u$, $\Delta\tilde{\nu} = 0{,}71433\,cm^{-1}$

a) Ges.: B, I, R

Energieniveaus $E_J = B \cdot J(J+1) \Rightarrow \Delta E_{J,J+1} = B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] = 2(J+1)B$

$\Rightarrow$ Abstand der Spektrallinien: $\underline{\underline{\Delta\tilde{\nu}}} = \frac{\Delta E_{J+1,J+2} - \Delta E_{J,J+1}}{hc} = \frac{2(J+2)B - 2(J+1)B}{hc} = 2\frac{B}{hc} = \underline{\underline{2\tilde{B}}}$

aus Vorlesung: $\Delta\tilde{\nu} = 2\tilde{B} = 2\frac{B}{hc} \Rightarrow \boxed{B} = \frac{1}{2}hc\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{0{,}71433}{10^{-2}m} \approx$

$\boxed{\approx 7{,}10 \cdot 10^{-24}\,J \quad \approx 4{,}43 \cdot 10^{-5}\,eV}$ 1 für oder

$B = \frac{\hbar^2}{2I} \Rightarrow \boxed{I} = \frac{\hbar^2}{2B} \left(= \frac{\hbar^2}{hc\Delta\tilde{\nu}} = \frac{\hbar}{2\pi c\Delta\tilde{\nu}} \right) \approx \frac{\left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js}{2\pi}\right)^2}{2 \cdot 7{,}10 \cdot 10^{-24}\,J} \boxed{\approx 7{,}84 \cdot 10^{-46}\,kg\,m^2}$ 1

$I = \mu R^2 \Rightarrow \boxed{R} = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{I(m_1+m_2)}{m_1 \cdot m_2}} \approx \sqrt{\frac{7{,}84 \cdot 10^{-46}\,kg\,m^2 \cdot (79+19)}{79 \cdot 19 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg}} \boxed{\approx 1{,}76 \cdot 10^{-10}\,m = 1{,}76\,Å}$ 1

b) Ges.: $\tilde{\nu}$ für Übergang $J=9 \rightarrow J=10$

$\Delta E_{9,10} = 2 \cdot 10 \cdot B \Rightarrow \boxed{\tilde{\nu}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot B}{hc} = 10 \cdot 2\tilde{B} = 10 \cdot \Delta\tilde{\nu} \boxed{= 7{,}1433\,cm^{-1}}$ 1

4 Punkte

2) Geg.: $m_{^{16}O} = 15{,}9949u$; $\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_{^{12}C^{16}O} = 3{,}84235\,cm^{-1}$, $\tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}_{^{13}C^{16}O} = 3{,}67295\,cm^{-1}$ (jeweils für $J=0 \rightarrow J=1$)

Ges.: $m_{^{13}C}$

$\tilde{\nu} = \frac{\Delta E_{0,1}}{hc} = \frac{2(0+1)B}{hc} = \frac{2 \cdot \frac{\hbar^2}{2I}}{hc} = \frac{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}{hc \cdot I} = \frac{h}{4\pi^2 c I} = \frac{h}{4\pi^2 c \cdot \mu R^2}$

$\Rightarrow \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} = \frac{h \cdot 4\pi^2 c \mu_2 R^2}{4\pi^2 c \mu_1 R^2 \cdot h} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ 1 $\Rightarrow \boxed{\mu_2} = \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2}\mu_1 = \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} \cdot \frac{m_{^{12}C} \cdot m_{^{16}O}}{m_{^{12}C} + m_{^{16}O}} = \frac{3{,}84235\,cm^{-1}}{3{,}67295\,cm^{-1}} \cdot \frac{12u \cdot 15{,}9949u}{12u + 15{,}9949u} \approx$

$\boxed{\approx 7{,}1724\,u}$ 1

$\mu_2 = \frac{m_{^{13}C} \cdot m_{^{16}O}}{m_{^{13}C} + m_{^{16}O}} \Leftrightarrow \mu_2 m_{^{13}C} + \mu_2 m_{^{16}O} = m_{^{13}C} \cdot m_{^{16}O} \Leftrightarrow \mu_2 \cdot m_{^{16}O} = m_{^{13}C}(m_{^{16}O} - \mu_2)$

1

$\Leftrightarrow \boxed{m_{^{13}C}} = \frac{\mu_2 \cdot m_{^{16}O}}{m_{^{16}O} - \mu_2} = \frac{7{,}1724\,u \cdot 15{,}9949\,u}{15{,}9949\,u - 7{,}1724\,u} \boxed{\approx 13{,}0034\,u}$ 1

oder ohne μ_2 auszurechnen: $\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m_{^{13}C} \cdot \cancel{m_{^{16}O}}\,(m_{^{12}C} + m_{^{16}O})}{m_{^{12}C} \cdot \cancel{m_{^{16}O}}\,(m_{^{13}C} + m_{^{16}O})} \Leftrightarrow (m_{^{13}C} + m_{^{16}O})\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} = m_{^{13}C}\frac{m_{^{12}C} + m_{^{16}O}}{m_{^{12}C}}$

$\Leftrightarrow m_{^{13}C}\left(\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} - \frac{m_{^{12}C} + m_{^{16}O}}{m_{^{12}C}}\right) = -m_{^{16}O}\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} \Leftrightarrow m_{^{13}C} = \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} \cdot \frac{m_{^{16}O}}{\frac{m_{^{12}C} + m_{^{16}O}}{m_{^{12}C}} - \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2}} = \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} \cdot \frac{m_{^{16}O} \cdot m_{^{12}C}}{m_{^{12}C} + m_{^{16}O} - \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2} m_{^{12}C}} \approx 13{,}0034\,u$

2

3) Gegeben: $\psi_J(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{iJ\varphi}$

4 Punkte

Zu zeigen ist, dass ψ_J die Schrödi. : $-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_J(\varphi) = E_J\psi_J(\varphi)$ erfüllt. Außerdem ist E_J gesucht.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_J(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{iJ\varphi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, iJe^{iJ\varphi} = iJ\,\psi_J(\varphi) \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_J(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}iJ\psi_J(\varphi) = iJ\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_J(\varphi) = iJ\cdot iJ\,\psi_J(\varphi) = -J^2\psi_J(\varphi) \quad 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_J(\varphi) = \frac{\hbar^2J^2}{2mr^2}\psi_J(\varphi) \quad 1$$

, d.h. $\psi_J(\varphi)$ erfüllt $-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_J(\varphi) = E_J\psi_J(\varphi)$ mit $\boxed{E_J = \frac{\hbar^2J^2}{2mr^2}}$ 1